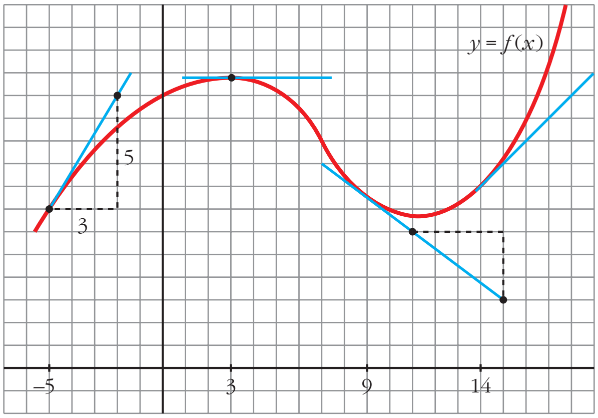
9 DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

REFLEXIONA Y RESUELVE

Tangentes a una curva



- Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$.

- Di otros tres puntos en los que la derivada es positiva.

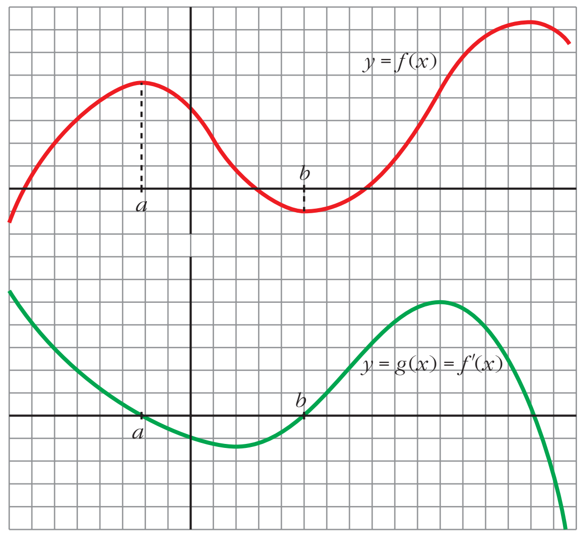
- Di otro punto en el que la derivada es cero.

- Di otros dos puntos en los que la derivada es negativa.

- Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$".

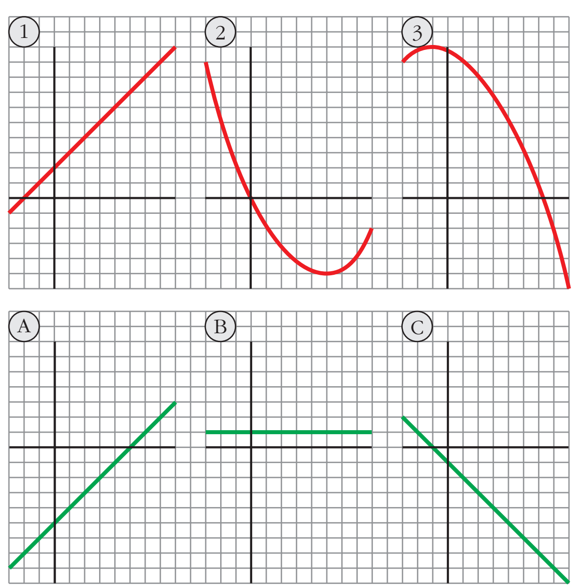
Función derivada

- **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



- **Las tres gráficas de abajo, A, B y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2 y 3, pero en otro orden.**

  Explica razonadamente cuál es la de cada una.



1. **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}}$

f) $f(x) = ln\sqrt{e^{tg\ x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log(sen\ x \cdot cos\ x)^2$

i) $f(x) = sen^2\ x + cos^2\ x + x$

j) $f(x) = sen\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\ sen\sqrt{x}$

l) $f(x) = sen(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\ x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

2. **Halla las derivadas 1.ª, 2.ª y 3.ª de las siguientes funciones:**

a) $y = x^5$ b) $y = x \cos x$ c) $y = sen^2\, x + \cos^2 x + x$

3. **Calcula $f'(1)$ siendo:** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

4. **Calcula $f'(\pi/6)$ siendo:**

$$f(x) = (\cos^2 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x$$

5. **Calcula $f'(0)$ siendo:**

$$f(x) = ln\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arc\ tg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Página 262

1. **Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

2. **Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

1. **Sabemos que la derivada de la función $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.**

Teniendo en cuenta este resultado, halla la derivada de su función inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

1. **Comprueba que $sen\,(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$ pasa por el punto $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y halla la ecuación de la recta tangente en ese punto.**

π

2. **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = (sen\ x)^x$ **b)** $g(x) = x^{sen\ x}$

1. **Calcula** Δy, dy, $\Delta y - dy$:

a) $y = x^2 - x$ **para** $x_0 = 3$, $dx_0 = 0{,}01$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **para** $x_0 = 2$, $dx_0 = 0{,}1$

c) $y = \sqrt[3]{x}$ **para** $x_0 = 125$, $dx_0 = 1$

2. **A una bola de bronce de 7 cm de radio se le da un baño de plata de 0,2 mm de grosor.**

Calcula la cantidad de plata empleada (aproximadamente, a partir de la diferencial).

3. **Calcula una aproximación de $\sqrt[3]{126}$ dando los siguientes pasos:**

- **Llama $f(x) = \sqrt[3]{x}$.**
- **Obtén df para $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1$.**
- **Obtén $f(126) \approx f(125) + df(125)$ para $dx_0 = 1$.**

4. **Procediendo como en el ejercicio anterior, halla, aproximadamente:**

a) $1{,}01^4$

b) $\sqrt{15{,}8}$

c) $\sqrt[3]{66}$

4

Página 275

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Reglas de derivación

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1 **a)** $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \sqrt[3]{3x^2}$

2 **a)** $y = \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^{2/3}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

3 **a)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $y = 7e^{-x}$

4 **a)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = \text{sen}\, x \cos x$

a) $y' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

b) $y' = \cos x \cdot \cos x + (-\text{sen}\, x) \cdot \text{sen}\, x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x = \cos 2x$

5 a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$ b) $y = ln(x^2 + 1)$

6 a) $y = arc\ tg \dfrac{x}{3}$ b) $y = cos^2 (2x - \pi)$

7 a) $y = sen^2\ x$ b) $y = \sqrt{tg\ x}$

2

8 a) $y = sen\ x^2$ b) $y = arc\ tg\ (x^2 + 1)$

2 2

9 a) $y = (2\sqrt{x} - 3)^7$ b) $y = log_2 \sqrt{x}$

10 a) $y = sen^2\ x^2$ b) $y = arc\ tg\ \dfrac{1}{x}$

11 a) $y = cos^5 (7x^2)$ b) $y = 3^x + 1$

12 a) $y = \sqrt[3]{(5x-3)^2}$ b) $y = arc\ sen\ \dfrac{x^2}{3}$

13 a) $y = ln(2x-1)$ b) $y = tg\ \dfrac{x^2}{2}$

14 a) $y = ln(x^2-1)$ b) $y = arc\ cos\ \sqrt{2x}$

15 a) $y = ln\sqrt{1-x}$ b) $y = (arc\ tg\ x)^2$

16 a) $y = log_3(7x+2)$ b) $y = ln\, tg\ \dfrac{3}{x}$

17 a) $y = e^{4x}$ b) $y = ln\left(ln\ \dfrac{1}{x}\right)$

18 a) $y = 2^x$ b) $y = arc\ sen \dfrac{x+1}{x-1}$

19 a) $y = 5\ tg^3(3x^2+1)$ b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

20 a) $y = \sqrt{tg\ x^2}$ b) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}$

Otras técnicas de derivación

21 **Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:**

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ b) $y = ln(x\ tg\ x)^2$

c) $y = ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)$ d) $y = ln(2^x\ sen^2\ x)$

22 **Calcula la derivada de estas funciones implícitas:**

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$

c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{8} - \dfrac{(y+3)^2}{14} = 1$

e) $x^3 + y^3 = -2xy$

f) $xy^2 = x^2 + y$

23 **Aplica la derivación logarítmica para derivar:**

a) $y = x^{3x}$

b) $y = x^{x+1}$

c) $y = x^{e^x}$

d) $y = (ln\ x)^{x+1}$

e) $y = \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^x$

f) $y = x^{tg\ x}$

24 **Obtén la derivada de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado:**

I) Utilizando las reglas de derivación que conoces.

II)Aplicando la derivación logarítmica.

a) $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^3$

b) $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

c) $y = sen^3\, x \cos^2 x$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}\ \sqrt[3]{x^2}$

25 **Calcula el valor de la derivada de cada una de las siguientes funciones en $x = 0$:**

a) $g(x) = e^{sen\, f(x)}$ **si** $f(0) = 0$ **y** $f'(0) = 1$

b) $h(x) = [sen\, f(x)]^3$ **si** $f(0) = \frac{\pi}{4}$ **y** $f'(0) = 1$

c) $j(x) = \sqrt{ln\, f(x)}$ **si** $f(0) = e$ **y** $f'(0) = 1$

26 **Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1$, halla:**

a) $(f \circ g)'(x)$ **b) $(g \circ f)'(x)$**

Derivabilidad y continuidad

27 **a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

28 **Comprueba que $f(x)$ es continua pero no derivable en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

29 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

s30 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Definición de derivada

31 **Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(2)$ en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

32 **Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada caso:**

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

PARA RESOLVER

33 **Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $y = |x - 2|$

b) $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x + |x - 3|$

d) $y = x^2 + |x|$

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 3.***

34 **Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$

b) $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = e^x(x-1)$

e) $y = x^2 e^x$

f) $y = sen\ x + cos\ x$

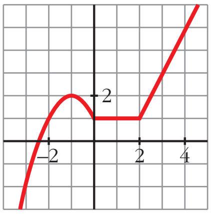
s35 **a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

s36 **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

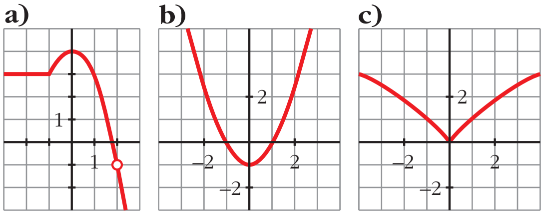
37 

Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Calcula, observándola:

$$f'(-1),\ f'(1)\ \text{y}\ f'(3)$$

¿En qué puntos no es derivable?

s38 **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables. ¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?**



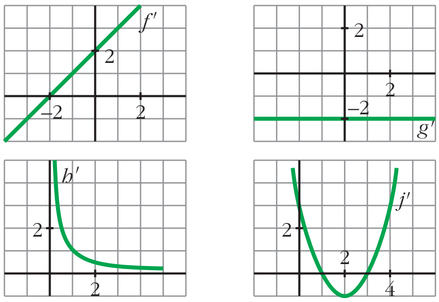
s39 **Calcula a y b para que f sea continua y derivable.**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

40 **Halla el valor de la derivada de la función $cos(x + y) + sen(x - y) = 0$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.**

s41 **Calcula la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.**

s42 **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j:**

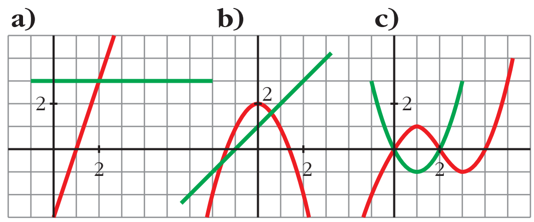


a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

43 **¿Cuál de los siguientes apartados representa la gráfica de una función f y la de su derivada f'? Justifica tu respuesta.**



44 **a) Representa la función siguiente:**

$$f(x) = |x + 1| + |x - 3|$$

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

b) Representa $f'(x)$.

s45 **Halla los puntos de derivada nula de la función siguiente:**

$$f(x) = (3x - 2x^2)\, e^x$$

46 **Dada la función $f(x) = e^x + ln(1 - x)$, comprueba que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. ¿Será también $f'''(0) = 0$?**

47 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{x^2-9} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

s48 **Determina, si es posible, el valor del parámetro *a* para que la función *f* sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

s49 **Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & x \le 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

s50 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

51 **Prueba la igualdad siguiente:** $D\left[arc\ tg\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

52 **Demuestra que la derivada de la función** $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ **con** $0 \le x \le \pi$ **es una constante.**

☛ ***Recuerda la fórmula de*** $tg\ \dfrac{x}{2}$.

53 **Si** $f(x) = x\ |x|$, **halla** f', f'' **y** f'''.

54 **Halla los puntos de derivada nula de la función** $y = \cos 2x - 2 \cos x$.

CUESTIONES TEÓRICAS

55 **Sabes que** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

A partir de esta expresión, justifica la validez de esta otra:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

56 **Relaciona los siguientes límites con la derivada de las funciones que aparecen en ellos:**

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$

s57 **Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula puede tener?**

¿Es posible que no tenga ninguno? ¿Es posible que solo tenga uno?

58 **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

59 **¿Puede haber dos funciones que tengan la misma derivada?**

Pon ejemplos de funciones cuya derivada sea $f'(x) = 2x$.

60 **Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = sen\ 2x$ se anulan en el origen de coordenadas.**

61 **La función $y = \sqrt{x^2 - 4x}$, ¿tiene algún punto de derivada nula?**

¿Y la función $y = \sqrt{4x - x^2}$?

62 **Sean f y g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que:**

$$f(0) = 5;\ f'(0) = 6;\ f'(1) = 3$$

$$g(0) = 1;\ g'(0) = 4;\ g'(5) = 2$$

Prueba que $f \circ g$ y $g \circ f$ tienen la misma derivada en $x = 0$.

PARA PROFUNDIZAR

63 **Dada $y = sen\ x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por $(0, 0)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.**

64 **Prueba, utilizando la definición de derivada, que la función:**

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

es derivable en $x = 1$ **y no lo es en** $x = -1$**.**

s65 $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Hay algún valor de k **para el cual** $f(x)$ **sea continua en** $x = 0$**?**

66 **Halla la derivada** ***n*****-ésima de las funciones siguientes:**

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \ln(1 + x)$

67 **Considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^n\, sen(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

siendo n un número natural.

a) Demuestra que f es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.

b) Demuestra que f no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

68 **Prueba que existe un punto de la curva:**

$$f(x) = e^x + arc\ tg\ x$$

cuya tangente (en ese punto) es paralela a la recta $y = 3x + 2$.

☛ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f'(x) - 3$.***

69 **Comprueba en cada caso que $f(x)$ verifica la ecuación indicada:**

a) $f(x) = e^x\ sen\ x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln \dfrac{1}{x+1}$

$x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$

s70 **Una persona camina, a la velocidad constante de 3 m/s, alejándose horizontalmente en línea recta desde la base de un farol cuyo foco luminoso está a 10 m de altura.**

Sabiendo que la persona mide 1,70 m, calcula:

a) La longitud de la sombra cuando la persona está a 5 m de la base del farol.

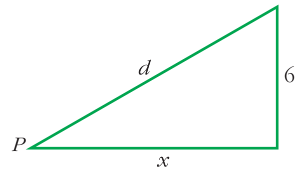
b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los *t* segundos de comenzar a caminar.

71 **Un avión vuela horizontalmente a 6 km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un punto *P* y se sabe que, en el instante en que la distancia del avión a *P* es 10 km, dicha distancia aumenta a razón de 6 km/minuto.**

Halla la velocidad del avión, que supondremos constante.

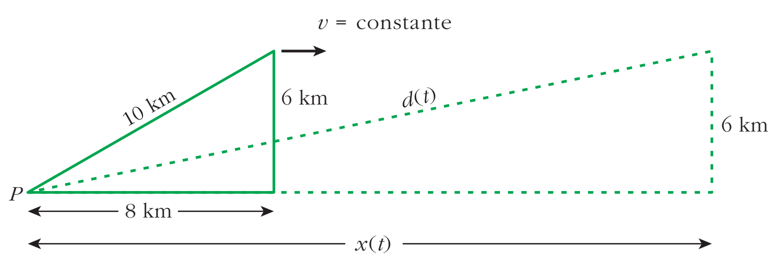
Pasos:

a) Expresa d en función de x:



b) Obtén la expresión de la velocidad de alejamiento de P, $d'(t)$, en función de x y de $x'(t)$.

c) Despeja $x'(t_0)$ siendo t_0 el instante al que se refiere el enunciado y, por tanto, para el que conocemos algunos datos numéricos. $x'(t_0)$ es la velocidad del avión en ese instante y, por tanto, su velocidad constante.



AUTOEVALUACIÓN

1. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x + 2)\sqrt{x - 1}$

b) $y = arc\ tg \dfrac{x + 3}{x - 3}$

c) $y = ln(ln\ x)^2$

d) $y = \sqrt[3]{2^{x - 1}}$

e) $y = (tg\ x)^{1 - x}$

f) $x^2 + y^2 - xy = 0$

2. **Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.**

3. **Dada la función $f(x) = x|x|$, defínela por intervalos y halla:**

a) $f'(x)$ **b)** $f''(x)$

Representa $f'(x)$ y $f''(x)$.

4. **Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ y calcula $f'(1)$.**

5. **Estudia la continuidad y la derivabilidad de:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$? Represéntala gráficamente.

6. **Halla a y b para que $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

7. **Observando la gráfica de esta función f, estudia su derivabilidad. Halla si existen $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(3)$.**